ВЫХОДИТ РАЗ В ДВЕ НЕДЕЛИ

Рекомендуемая розничная цена: 279 руб.
Розничная цена: 49,90 грн, 39 900 бел. руб., 990 тенге

Занимательные ГОЛОВОЛОМКИ

КОЛЛЕКЦИЯ ЛОГИЧЕСКИХ ИГР ОТ DeAGOSTINI

53

Сцепленные дощечки

ISSN 2225-1782
00053
9 772225 178772

DeAGOSTINI

занимательные ГОЛОВОЛОМКИ

КОЛЛЕКЦИЯ ЛОГИЧЕСКИХ ИГР ОТ DeAGOSTINI

В этом выпуске:

Математическая вселенная

Всем знакомые кривые Конические сечения и квадрики — самые знакомые нам кривые и поверхности: мы мгновенно и безошибочно узнаем их всякий раз, когда сталкиваемся с ними. Конические сечения описывают орбиты планет, линзы, траектории ракет и снарядов. Квадрики можно увидеть в параболических антеннах, в архитектуре, в трубах ТЭЦ, во множестве емкостей и сосудов, которые мы встречаем каждый день. Форму квадрик имеют даже седла для верховой езды.

Блистательные умы

Евклид О жизни Евклида, часто называемого отцом геометрии, известно множество историй, большинство из которых не вполне достоверны. Имя Евклид в те времена было весьма распространенным: так, Евклида Александрийского путают с Евклидом из Мегары — философом, родившимся на сто лет раньше. Ученые сомневаются даже в том, что Евклид вообще существовал: высказываются гипотезы, что труды, приписываемые Евклиду, были созданы группой математиков Александрийской школы.

Математика на каждый день

От статистики к теории узлов Математика была неотъемлемым элементом биологии с того момента, когда биология начала оформляться как наука. До недавнего времени из всех разделов математики в биологии чаще всего применялась статистика. Сегодня, благодаря невероятному прогрессу биологии, особенно молекулярной, в ней начинают использоваться различные разделы высшей математики, в частности дифференциальная геометрия, топология и анализ бесконечных рядов.

Математические задачки

Китайские и голландские задачи Любой, кто задавал какую-нибудь задачу группе друзей, знаком с Алексом и его манерой убеждать других, что он знает все о задаче, еще до того, как услышит объяснение. Если задача ему знакома, он сразу же говорит ответ, если нет — он принимается доказывать, что она похожа на другую, известную ему и, разумеется, более сложную. Заставить Алекса признать свое поражение — подлинное удовольствие. Именно это произошло в одной из задачек, которую предлагает нам сегодня Сэм Лойд.

Головоломки

Дьявольский крест История этой головоломки не менее интересна, чем ее решение, и напоминает математический роман. Сначала головоломка выглядит самым невинным образом, но постепенно превращается в монстра комбинаторной математики, в предмет нумерологического культа, последователи которого создали множество интернет-сайтов, посвященных ее анализу.

«ЗАНИМАТЕЛЬНЫЕ ГОЛОВОЛОМКИ»
Издание выходит раз в две недели
Выпуск № 53, 2014
РОССИЯ

ИЗДАТЕЛЬ, УЧРЕДИТЕЛЬ, РЕДАКЦИЯ:
ООО «Де Агостини», Россия
ЮРИДИЧЕСКИЙ АДРЕС: 105 066, г. Москва,
ул. Александра Лукьянова, д.3, стр.1
Письма читателей по данному адресу не принимаются.

ГЕНЕРАЛЬНЫЙ ДИРЕКТОР: Николаос Скилакис
ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР: Анастасия Жаркова
ВЫПУСКАЮЩИЙ РЕДАКТОР: Варвара Степановская
ФИНАНСОВЫЙ ДИРЕКТОР: Наталия Василенко
КОММЕРЧЕСКИЙ ДИРЕКТОР: Александр Якутов
МЕНЕДЖЕР ПО МАРКЕТИНГУ: Михаил Ткачук
МЛАДШИЙ МЕНЕДЖЕР ПО ПРОДУКТУ: Любовь Мартынова

Уважаемые читатели! Для вашего удобства рекомендуем приобретать выпуски в одном и том же киоске и заранее сообщать продавцу о вашем желании покупать следующие выпуски коллекции.

Свидетельство о регистрации средства массовой информации в Федеральной службе по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций (Роскомнадзор) ПИ № ФС77-43310 от 28.12.2010 г.

Для заказа пропущенных номеров
и по всем вопросам, касающимся информации о коллекции, заходите на сайт
www.deagostini.ru

По остальным вопросам обращайтесь по телефону бесплатной «горячей линии» в России:
8-800-200-02-01

Телефон «горячей линии» для читателей Москвы:
8-495-660-02-02

АДРЕС ДЛЯ ПИСЕМ ЧИТАТЕЛЕЙ:
Россия, 105066, г. Москва, а/я 13, «Де Агостини», «Занимательные головоломки»

РАСПРОСТРАНЕНИЕ:
ООО «Бурда Дистрибьюшен Сервисиз»

УКРАИНА
ИЗДАТЕЛЬ И УЧРЕДИТЕЛЬ:
ООО «Де Агостини Паблишинг», Украина
ЮРИДИЧЕСКИЙ АДРЕС: 01032, Украина,
г. Киев, ул. Саксаганского, д. 119
ГЕНЕРАЛЬНЫЙ ДИРЕКТОР: Екатерина Клименко

Свидетельство о государственной регистрации печатного СМИ Министерства юстиции Украины КВ № 17502-6252Р от 01.03.2011

АДРЕС ДЛЯ ПИСЕМ ЧИТАТЕЛЕЙ:
Украина, 01033, г. Киев, а/я «Де Агостини», «Занимательные головоломки»
Україна, 01033, м. Київ, а/с «Де Агостіні»

Для заказа пропущенных номеров
и по всем вопросам, касающимся информации о коллекции, заходите на сайт
www.deagostini.ua

По остальным вопросам обращайтесь по телефону бесплатной «горячей линии» в Украине:
0-800-500-8-40

БЕЛАРУСЬ
ИМПОРТЕР И ДИСТРИБЬЮТОР В РБ: ООО «Росчерк», 220037, г. Минск, ул. Авангардная, д. 48а, литер 8/к, тел./факс: (+375 17) 331-94-41, (+375 29) 673-55-55, (+375 33) 637-20-29

Телефон «горячей линии» в Беларуси:
+375 17 279-87-87 (пн-пт, 9.00 — 21.00)

АДРЕС ДЛЯ ПИСЕМ ЧИТАТЕЛЕЙ: Республика Беларусь, 220040, г. Минск, а/я 224, ООО «Росчерк», «Де Агостини», «Занимательные головоломки»

КАЗАХСТАН
РАСПРОСТРАНЕНИЕ: ТОО «КГП «Бурда-Алатау-Пресс»

РЕКОМЕНДУЕМАЯ РОЗНИЧНАЯ ЦЕНА: 279 руб.
РОЗНИЧНАЯ ЦЕНА: 49,90 грн, 39 900 бел. руб., 990 тенге

ОТПЕЧАТАНО В ТИПОГРАФИИ: ООО «Компания Юнивест Маркетинг», 08500, Украина, Киевская область, г. Фастов, ул. Полиграфическая, 10

ТИРАЖ: 60 000 экз.

Издатель оставляет за собой право изменять последовательность номеров и их содержание.

Издатель оставляет за собой право увеличить рекомендуемую цену выпусков.

Неотъемлемой частью каждого выпуска является приложение.

ISSN 2225-1782

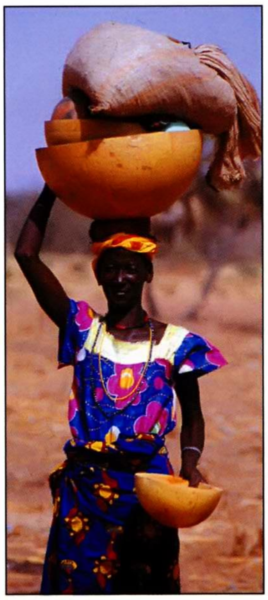
ДАТА ВЫХОДА В РОССИИ: 12.02.2014

Конические сечения и квадрики привлекали особое внимание математиков с древнейших времен. Причина этому, возможно, состоит в том, что и конические сечения, и квадрики можно часто увидеть на земле и на небе.

Конические сечения и квадрики
Всем знакомые кривые

Платоновы тела больше отражают наше представление об объектах, а не их реальные очертания. В отличие от них конические сечения и квадрики — самые знакомые нам кривые и поверхности: мы мгновенно и безошибочно узнаем их всякий раз, когда сталкиваемся с ними. Конические сечения описывают орбиты планет, линзы, траектории ракет и снарядов. Квадрики можно увидеть в параболических антеннах, в архитектуре, в трубах ТЭЦ, во множестве емкостей и сосудов, которые мы встречаем каждый день (это и стаканы, и бокалы, и чашки). Форму квадрик имеют даже седла для верховой езды.

Чтобы вывести аналитические уравнения всех этих поверхностей, классифицировать их, вычислить их длины, площади и объемы, потребовался труд многих великих математиков, которые изучали столь важные дисциплины, как геометрия, алгебра и дифференциальное исчисление.



◄ *На рисунках вы можете видеть, насколько часто квадрики встречаются в повседневной жизни. Квадрики можно встретить в самых разных культурах — это и сосуды, которые использует африканская женщина для переноски грузов (рисунок слева), и бокал вина сложной формы (рисунок справа), представляющий собой круговой параболоид.*

Конические сечения: определения и уравнения

Окружность: геометрическое место точек плоскости, равноудаленных от данной точки, называемой центром. Радиусом окружности называется расстояние от ее центра до произвольной точки окружности.

Уравнение в сокращенном виде: $x^2 + y^2 = r^2$.

Уравнение в общем виде: $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$.

Эллипс: геометрическое место точек плоскости, для которых сумма расстояний до двух данных фиксированных точек постоянна. Эти две фиксированные точки называются фокусами эллипса.

Уравнение в сокращенном виде $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1.$

Уравнение в общем виде: $Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0$.

Гипербола: геометрическое место точек плоскости, для которых разность расстояний до двух данных фиксированных точек постоянна. Эти две фиксированные точки называются фокусами гиперболы.

Уравнение в сокращенном виде $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1.$

Уравнение в общем виде: $Ax^2 - By^2 + Cx + Dy + E = 0$.

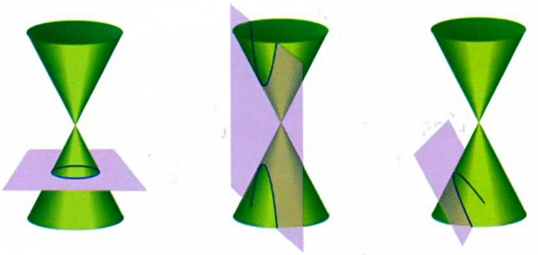
Парабола: геометрическое место точек плоскости, равноудаленных от данной точки, называемой фокусом, и данной прямой, называемой директрисой параболы.

Уравнение в сокращенном виде: $x^2 = 4cy$.

Уравнение в общем виде: $x^2 + Dx + Ey + F = 0$.

Конические сечения

Невырожденными коническими сечениями называются кривые, получаемые сечением двустороннего конуса плоскостью. Если секущая плоскость перпендикулярна оси конуса, сечением будет окружность. Если секущая плоскость параллельна оси конуса, сечением будет гипербола, в остальных случаях — парабола. Эллипс и гипербола — это конические сечения, имеющие центр (окружность представляет собой частный случай эллипса).



Конические сечения были известны еще древним грекам (в частности, их подробно рассмотрел Аполлоний). Их также подробно изучил Иоганн Кеплер при определении орбит планет и Исаак Ньютон, который сформулировал физические законы, позволяющие показать, что два тела, на которые действует исключительно сила взаимного тяготения, будут двигаться относительно друг друга по коническим сечениям (эта задача получила название задачи двух тел).

▲ *В космосе существуют три основных вида галактик: спиральные, эллиптические и линзовидные. Небесные тела, образующие линзовидные галактики подобные той, что изображена на иллюстрации, расположены в форме квадрики, которая напоминает линзу (отсюда и название).*

Квадрики — это поверхности, определенные в трехмерном пространстве и задаваемые уравнениями, которые называются квадратичными формами.

Существует всего пять видов квадрик: эллипсоиды, два вида гиперболоида и два вида параболоида. Также существуют так называемые вырожденные квадрики. К ним относятся цилиндры и конусы, основаниями которых являются конические сечения. С учетом того, что квадрики могут иметь или не иметь центра, можно классифицировать квадрики следующим образом.

Квадрики	Имеют центр	Эллипсоид	
		Гиперболоид	Однополостный
			Двуполостный
	Не имеют центра	Параболоид	Эллиптический
			Гиперболический
	Вырожденные	Цилиндры	
		Конусы	

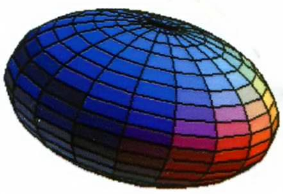
Можно провести аналогию между коническими сечениями и квадриками, связав эллипсы и эллипсоиды, гиперболы и гиперболоиды, параболы и параболоиды. Эта аналогия, разумеется, не ограничивается схожестью названий и становится очевидной при сечении квадрик плоскостью: их сечениями будут соответствующие конические сечения. Можно сказать (однако это будет несколько неточно), что квадрики строятся на основе конических сечений.

▶ *В спорте можно увидеть множество квадрик: это и мячи для регби (наверху) — эллипсоиды, в уравнении которых два параметра из трех равны, это и сферы, используемые в метаниях (внизу) — эллипсоиды, в уравнении которых равные значения имеют все три параметра.*

Эллипсоиды

Эллипсоиды в общем виде описываются уравнением

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=\pm 1.$$



Случай

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=-1$$

соответствует мнимому эллипсоиду. Следовательно, обычный эллипсоид задается уравнением

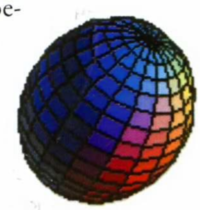
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

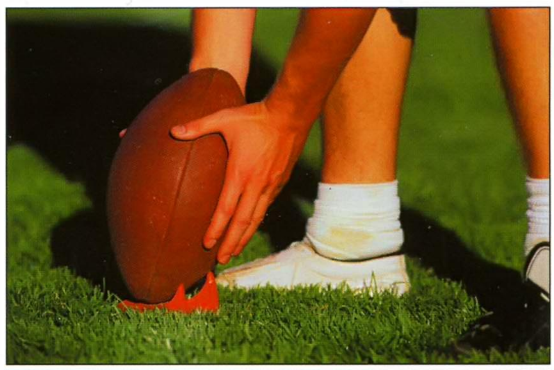
В общем случае сечения эллипсоида плоскостью, перпендикулярной любой из трех координатных осей, будут эллипсами разных форм и размеров, что напрямую следует из уравнения эллипсоида. К примеру, если мы рассечем эллипсоид плоскостью $z = k$, уравнение эллипсоида примет вид

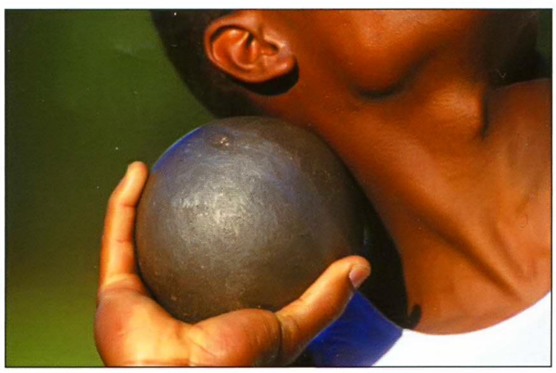
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1-\frac{k^2}{c^2}.$$

Это уравнение эллипса с полуосями a и b и центром в точке $(0, 0, k)$.

Если любые два из параметров a, b, c равны, имеем частный случай эллипсоида, который называется сфероидом. Именно такую форму имеют мячи для регби. Сфероид можно определить как поверхность вращения, получаемую вращением эллипса вокруг большой оси. Если же все три параметра равны, эллипсоид примет форму сферы.





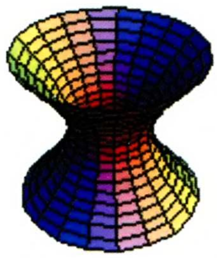


◄ *Линейчатые поверхности, называемые однополостными гиперболоидами, выделяются благодаря особому внешнему виду. Форму линейчатых поверхностей часто имеют огромные градирни (охладительные башни) на тепловых и атомных электростанциях.*

Однополостный гиперболоид

Однополостный гиперболоид задается уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$



Он представляет собой линейчатую поверхность, так как заключает в себе прямые.

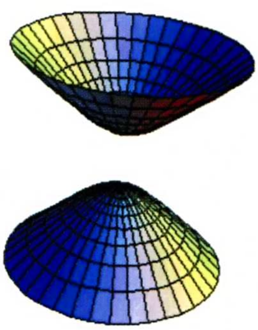
Сечения гиперболоида плоскостями, перпендикулярными оси Z, представляют собой эллипсы (при $a = b$ окружности). Сечения гиперболоида плоскостями, параллельными оси Z, представляют собой ветви гиперболы.

Однополостный гиперболоид также можно определить как поверхность вращения, получаемую вращением гиперболы вокруг срединного перпендикуляра к отрезку, соединяющему ее фокусы.

Двуполостный гиперболоид

Двуполостный гиперболоид — это поверхность, определяемая уравнением:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1.$$



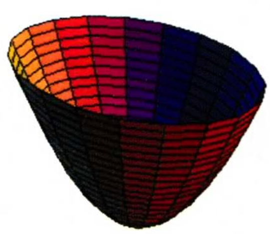
Ее можно определить как поверхность вращения, получаемую вращением гиперболы вокруг прямой, соединяющей ее фокусы.

Сечение двуполостного гиперболоида плоскостью, перпендикулярной оси Z, то есть плоскостью, определяемой уравнением $z = k$, будет вещественным эллипсом, если $|k| > c$, и мнимым эллипсом в противном случае.

Эллиптический параболоид

Определяется уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2z.$$



Сечениями эллиптического параболоида плоскостями $x = k$, то есть плоскостями, перпендикулярными оси X, будут параболы. Сечения плоскостями $z = k$, то есть плоскостями, перпендикулярными оси Z, будут эллипсами (при условии, что $k > 0$). Форму эллиптического параболоида имеет большинство спутниковых антенн (поэтому их часто называют параболическими).

► *Форму эллиптических параболоидов имеют телекоммуникационные антенны (в частности, параболические спутниковые антенны) и радиотелескопы в обсерваториях всего мира (справа), которые улавливают радиоволны, поступающие из космоса.*

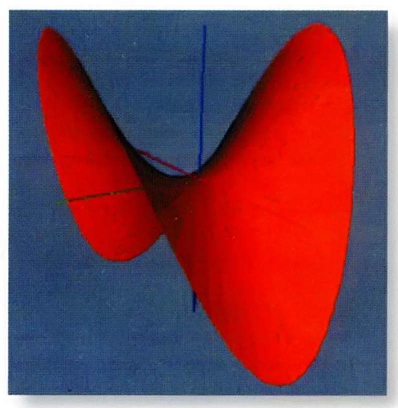
Гиперболический параболоид

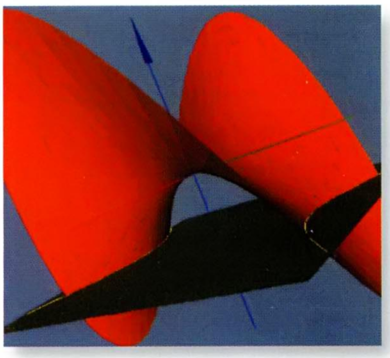
Гиперболический параболоид, возможно, самая сложная из квадрик, однако представить ее проще всего: достаточно вспомнить, как выглядит седло для верховой езды.

Гиперболический параболоид задается следующим уравнением в декартовых координатах:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z.$$

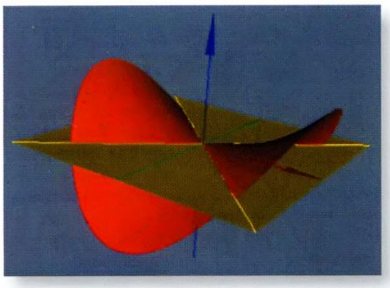
Его изображение в декартовых координатах (ось X выделена зеленым цветом, ось Y — красным, ось Z — синим) выглядит так:





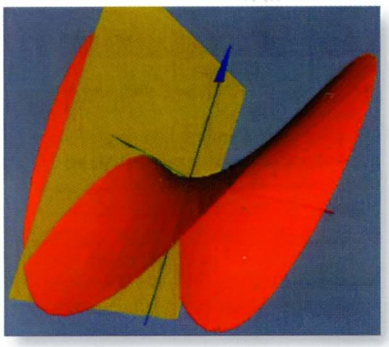
Сечением гиперболического параболоида перпендикулярной ему плоскостью, не проходящей через его центр, будет гипербола, ветви которой располагаются в плоскости XY. Расположение ветвей этой гиперболы зависит от того, сверху или снизу будет располагаться секущая плоскость относительно начала координат.

При сечении гиперболического параболоида плоскостью, проходящей через начало координат, образуются две прямые, пересекающиеся в начале координат, то есть вырожденная квадрика.



Две пересекающиеся прямые изображены на иллюстрации желтым цветом.

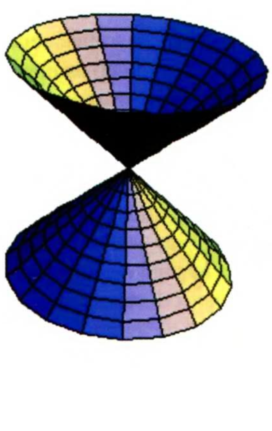
Сечением гиперболического параболоида плоскостью, параллельной оси Z, будет парабола. Она будет более или менее вогнутой в зависимости от того, насколько секущая плоскость удалена от начала координат.



Конусы

Конус можно считать пирамидой, сечения которой, параллельные основанию, имеют форму окружности. Если эти сечения имеют форму эллипса, конус называется эллиптическим. Уравнение конуса в декартовых координатах выглядит так:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0.$$



Линейчатые поверхности и поверхности вращения

Линейчатые поверхности — это поверхности, которые образуются движением прямой (она называется образующей). Следовательно, линейчатые поверхности содержат в себе прямые. Иногда непросто определить на глаз, является поверхность линейчатой или нет. Для этого нужно «опереть» на эту поверхность край линейки (отсюда и название «линейчатая поверхность»). Примеры линейчатых поверхностей — однополостный гиперболоид и гиперболический параболоид.

Некоторые линейчатые поверхности обладают дополнительным свойством: к каждой их образующей можно провести единственную касательную плоскость. Это означает, что такие поверхности имеют плоскую развертку, то есть их можно развернуть на плоскости, как, например, цилиндр. По этой причине такие поверхности называют развертывающимися. Не все линейчатые поверхности развертывающиеся. Так, два приведенных выше примера, а именно однополостный гиперболоид и гиперболический параболоид, — это линейчатые, но не развертывающиеся поверхности.

Поверхности вращения, напротив, образуются вращением некоторой кривой вокруг оси. Тем не менее следует отметить, что в этом случае прямая считается разновидностью кривой. Следовательно, цилиндр или конус являются квадриками вращения.

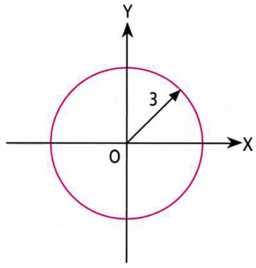
► ▼ Так как барабаны и пастельные карандаши, изображенные на иллюстрации, имеют очевидно цилиндрическую форму, можно сделать вывод: их поверхность представляет собой квадрику вращения.

Цилиндры

Рассмотрим прямую, перпендикулярную плоскости, определенной произвольным коническим сечением. Поверхность, порождаемая этой прямой при обходе конического сечения, будет поверхностью цилиндра. Если исходное коническое сечение будет окружностью, цилиндр называется круговым. Если исходное коническое сечение имеет форму эллипса, параболы или гиперболы, цилиндр называется эллиптическим, параболическим или гиперболическим соответственно.

Канонические уравнения

Самым знакомым из всех конических сечений, безусловно, является окружность (справа). Окружность определяется очень просто: это геометрическое место точек плоскости, равноудаленных от данной точки, называемой центром. Уравнение окружности в декартовых координатах также простое: $x^2 + y^2 = R^2$, где R — радиус окружности. Рассмотрим графическое изображение окружности в конкретном случае, например при R = 3. Представленное выше уравнение примет вид $x^2 + y^2 = 9$. Это простое уравнение, так как центр окружности совпадает с началом координат.

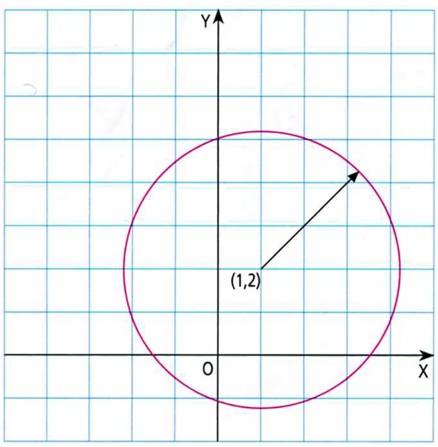


Если мы перенесем центр окружности в точку (1, 2), уравнение окружности заметно изменится:

$$x^2 + y^2 - 2x - 4y - 4 = 0.$$

Рассмотрим это уравнение. Сначала непросто увидеть, что это уравнение окружности, радиус которой равен 3. Проведем небольшой эксперимент: перенесем начало координат из точки (0, 0) в точку (1, 2). Для этого нужно ввести новую систему координат, которая будет задаваться уравнениями

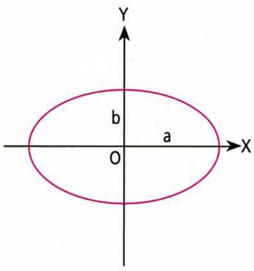
$$x' = x + 1,$$
$$y' = y + 2.$$



Подставим новые координаты в уравнение окружности:

$$(x + 1)^2 + (y + 2)^2 - 2\,(x + 1) - 4\,(y + 2) - 4 = 0.$$

Приведем подобные слагаемые и получим исходное уравнение $x^2 + y^2 = 9$. Это уравнение называется каноническим уравнением окружности. Не будем вдаваться в детали и укажем, что существует относительно простой алгоритм, позволяющий получить каноническое уравнение окружности в общем виде. Этот алгоритм рассматривается в курсе элементарной математики. Здесь мы хотим показать, что с усложнением конического сечения его уравнение также будет все больше усложняться. Окружность — это фигура, симметричная относительно центра, поэтому, чтобы получить каноническое уравнение окружности, нужно перенести ее центр в начало координат. Однако в случае с другими коническими сечениями, например с эллипсом, подобного не происходит, так как эллипс не обладает такой же симметрией, как окружность: длины осей эллипса различаются; следовательно, он может быть расположен на плоскости разными способами.

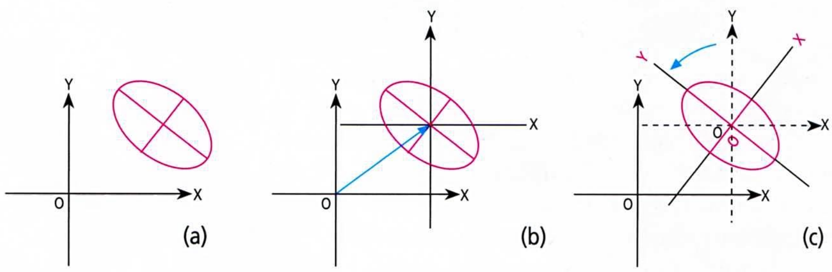


Каноническое уравнение эллипса с полуосями a и b (внизу слева) записывается так:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Это означает, что центр эллипса совпадает с началом координат, а его полуоси расположены вдоль координатных осей.

Однако если эллипс расположен иначе, его уравнение будет выглядеть совершенно по-другому, например так: $3x^2 + 2xy + 3y^2 + 16x + 16 = 0$. Чтобы свести произвольное коническое сечение (a) к каноническому виду, в общем случае нужно выполнить два действия: перенести начало координат так, чтобы оно совпало с центром конического сечения (b), после чего повернуть координатные оси так, чтобы их направление совпало с направлением осей конического сечения (c). По сути,



выполнить эти операции непросто, если не знать общего алгоритма. Эта задача может существенно усложниться, если рассмотреть ее в пространстве. Например, привести к каноническому виду уравнение $9x^2 + 2y^2 - 4z^2 - 12xy - 12xz - 2x + 24y + 14z - 5 = 0$, которое описывает гиперболический параболоид, уже не так просто.

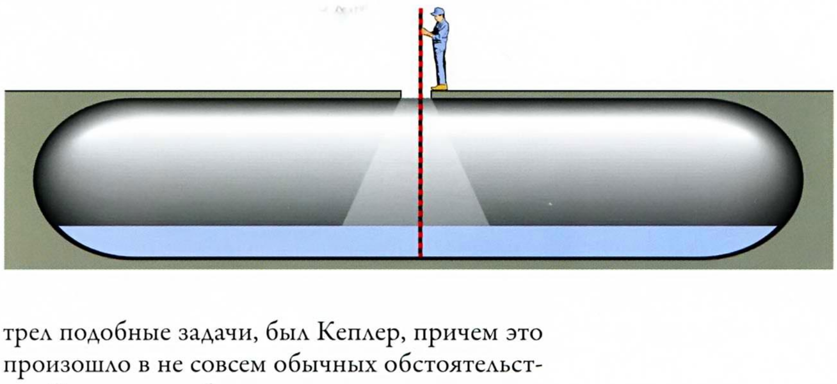
Длительный процесс

Итак, мы показали, как можно упростить уравнения конических сечений и квадрик путем правильного выбора осей координат, направление которых совпадает с направлением осей фигур. При этом мы применили методы, которые были известны еще в XVIII веке, а первую классификацию канонических уравнений конических сечений и квадрик привел Коши в труде «Лекции о приложениях анализа бесконечно малых», опубликованном в 1826 году. В основе его классификации лежал ряд положительных и отрицательных членов, которые записывались в каноническом виде. При этом не было достоверно известно, останутся ли их знаки неизменными при смене системы координат. Закон, описывающий квадратичные формы от n переменных, первым сформулировал Сильвестр, однако он не привел доказательства. Это доказательство нашел Якоби и позднее Гаусс. С помощью так называемого характеристического уравнения им удалось доказать теорему об инвариантности сокращения квадратичных форм. Уже в начале XX века, с развитием аналитической геометрии, при изучении однородных функций был открыт метод, позволяющий приводить квадратичные формы к каноническому виду, особенно с введением однородных координат. Таким образом изучение и классификация конических сечений и квадрик стали всего лишь еще одной составной частью более общей науки — проективной геометрии.

▼ *Чтобы определить объем содержимого сосуда известной формы (эту задачу, в частности, необходимо решать при перевозке и хранении молока, вина, масла или бензина), нужно опустить измерительный стержень в сосуд перпендикулярно его дну. На этом стержне нанесены отметки, что позволяет мгновенно определить объем жидкости в сосуде.*

Кеплер и винные бочки

Огромные хранилища горючего, которые можно увидеть в аэропортах, обычно имеют форму цилиндра, с двух сторон оканчивающегося параболоидами. Такую же форму имеют многие цистерны для хранения газа. Один из способов, позволяющих определить объем жидкости в цистернах подобной формы, заключается в следующем. Нужно опустить в цистерну измерительный стержень, на который нанесены отметки, указывающие объем жидкости. Чтобы нанести отметки на измерительный стержень (в зависимости от формы цистерны расположение меток будет различным), необходимо использовать квадрики и интегральное исчисление, в частности двойные и тройные интегралы. Одним из первых математиков, кто рассмотрел подобные задачи, был Кеплер, причем это произошло в не совсем обычных обстоятельствах. Впервые он обратил внимание на эту задачу в тот самый день, когда сочетался вторым браком с Сюзанной Рейтингер (его первая жена скончалась годом ранее). Это был брак по расчету, так как Кеплер искал женщину, которая позаботилась бы о нем и его детях и вела домашнее хозяйство. Сюзанна, должно быть, понимала, насколько необычным характером отличается ее будущий муж, поскольку она не удивилась, когда он покинул свадебное торжество, чтобы подробно изучить, как трактирщик измеряет объем вина в бочках. Бочки не имели строго цилиндрической формы, и объем вина измерялся с помощью стержня, который опускался в сосуд через отверстие в крышке. Результатом размышлений Кеплера стал вышедший в 1615 году трактат под названием «Новая стереометрия винных бочек». Для решения задачи Кеплер использовал метод неделимых, разработанный Архимедом. Некоторое время спустя метод Кеплера усовершенствовал Бонавентура Кавальери (1598–1647). Можно сказать, что на свадьбе Кеплера были заложены основы новой научной дисциплины, впоследствии получившей название анализа бесконечно малых.



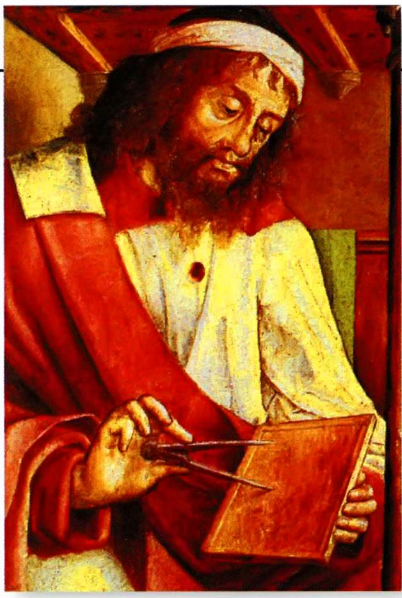
ЭТО ИНТЕРЕСНО

- Многие задаются вопросом, почему квадрики называются именно так, ведь латинское слово quadrise обозначает число 4, а квадрики задаются уравнениями второй степени. Ответ на этот вопрос таков: слово «квадрат» на латыни звучит как quadratum, а площадь квадрата со стороной l равна l^2. По этой причине уравнения, содержащие переменные во второй степени (x^2), называются квадратными, и по этой же причине поверхности, которые задаются такими уравнениями, называются квадриками.

Труд Евклида занимает очень важное место в истории математики. Хотя содержание «Начал» может показаться нам элементарным, эта книга представляет собой не просто рекомендуемое, но обязательное чтение для любого профессионального математика.

Блистательные умы

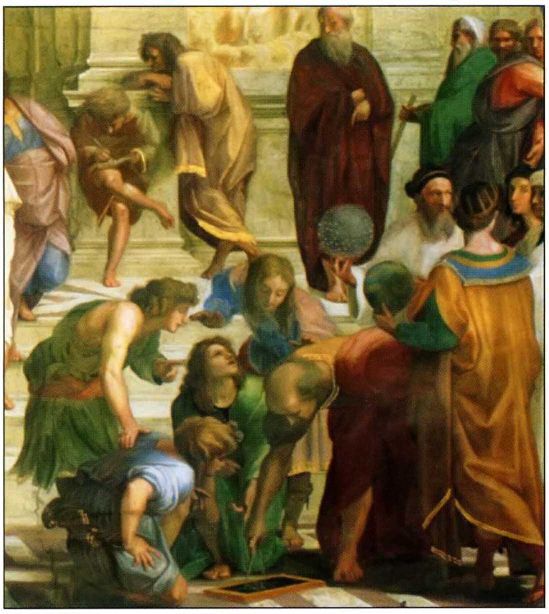
Отец геометрии Евклид



▲ *Евклид определил классическую формулировку математических высказываний и первым стал выводить новые высказывания из предварительно выбранных утверждений, считающихся истинными. В «Началах» в качестве отправной точки выбраны 23 определения, пять постулатов и пять аксиом, или общих утверждений.*

О жизни Евклида известно множество историй, большинство из которых не вполне достоверны. По некоторым источникам, Евклид родился в Тире в семье некоего Наукрата, однако историки считают подобные заявления однозначно ошибочными. Другие источники служат причиной множества сомнений, поскольку имя Евклид в те времена было весьма распространенным: так, Евклида Александрийского путают с Евклидом из Мегары — философом, родившимся на сто лет раньше. Ученые сомневаются даже в том, что Евклид вообще существовал: высказываются гипотезы, что труды, приписываемые Евклиду, были созданы группой математиков Александрийской школы, подобной группе Бурбаки, под коллективным псевдонимом. Если считать, что Евклид как реальное историческое лицо и автор «Начал» действительно существовал, то лучшим источником сведений о его жизни будут труды Прокла Диадоха (411–585), видного древнегреческого философа, который описал жизнь и творчество Евклида Александрийского.

Все это наводит на мысль, что Евклид если и не родился в Афинах, то по меньшей мере обучался там, так как ему была досконально известна геометрия, которую преподавали в школе Платона. Годы жизни Евклида также достоверно неизвестны. Примерной датой рождения ученого считается 325 г. до н. э., датой смерти — 265 г. до н. э. О его жизни известно немногое: он давал уроки геометрии в Александрийском музее, который в то время усилиями царя Птолемея I Сотера стал культурным центром мира не в последнюю очередь благодаря знаменитой библиотеке.



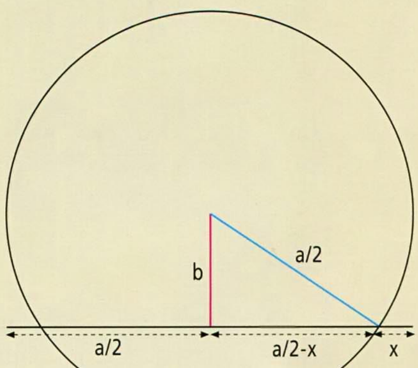
◄ *На картине «Афинская школа», созданной Рафаэлем для станце делла Сеньятура Ватиканского дворца в 1509–1510 годах, мы видим Евклида среди выдающихся мыслителей Античности. Некоторые авторы считают, что Евклид изображен в правом нижнем углу, склоненный над чертежом, который он рисует с помощью циркуля.*

«Начала»

Самым известным трудом Евклида, несомненно, являются «Начала». Эта книга считается второй по популярности книгой всех времен после Библии и до сих используется в качестве учебника по элементарной геометрии в школах всего мира. Причиной этому стал прекрасный стиль изложения книги. «Начала» состоят из 13 книг.

Решение задачи $x^2+b^2= ax$, предложенное Евклидом

Чтобы вычислить x, нужно провести отрезок длиной a, после чего провести через середину этого отрезка перпендикуляр длиной b. Затем нужно построить окружность радиусом $a/2$ с центром в конце отрезка длиной b. Таким образом, x будет решением уравнения $(a - x)\, x = b^2$, что равносильно $x^2 + b^2 = ax$. Чтобы убедиться в правильности решения, вычислим $(a/2)^2 - (a/2 - x)^2 = b^2$, откуда следует $(a/2)^2 - (a/2 - x)^2 = (a - x)\, x$. Таким образом, x действительно будет искомым решением.



Бесконечность множества простых чисел

Чтобы доказать, что существует бесконечно много простых чисел, Евклид рассуждал следующим образом. Пусть p — произвольное простое число. Определим число q как произведение всех натуральных чисел от 1 до p, увеличенное на единицу:

$$q = (1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot p) + 1.$$

Таким образом, $q > p$. Если q — простое, мы нашли простое число, большее p. Если q не простое, оно будет иметь простой делитель, который не будет делителем p. Это означает, что существует простое число, большее p. Так как p — произвольное простое число, мы доказали, что множество простых чисел бесконечно.

Это доказательство, приведенное в книге IX «Начал» Евклида, не только важно само по себе, но и считается эталоном точности и красоты.

Первые шесть книг составляют полный курс элементарной геометрии. Книги с VII по X включительно посвящены задачам арифметики. В них приведены известные рассуждения, например алгоритм вычисления наибольшего общего делителя двух чисел или доказательство бесконечности множества простых чисел, а также одно из самых знаменитых доказательств теоремы Пифагора. Три последние книги посвящены геометрии тел. Несмотря на то, что большинство тем, раскрытых Евклидом, до него изучили Евдокс (408–355 гг. до н. э.) и Теэтет (417–369 гг. до н. э.), Евклид придал доказательствам логическую структуру, взяв за основу 23 определения, пять постулатов и пять аксиом, и определил классическую форму математических рассуждений. «Начала» стали первым математическим трактатом в истории.

В число других работ, приписываемых Евклиду, входят «Исчисления», которые содержат 94 теоремы с доказательствами, «Явления» — введение в астрономию с точки зрения математики, содержащее данные о времени восхода и захода некоторых звезд, а также «Оптика» — первый из известных нам древнегреческих трактатов о перспективе. Другие произведения, приписываемые Евклиду, утеряны и известны только по упоминаниям других авторов. К этим произведениям относятся два тома «Геометрических мест», «Конические сечения», «Поризмы» и «Начала музыки».

▼ *«Начала» Евклида, которые по популярности могут поспорить с Библией и «Дон Кихотом», выдержали множество изданий, что можно оценить на примере этих страниц из классических изданий «Начал» на самых разных языках.*

Это интересно

- Евклид (внизу изображена марка Мальдив, выпущенная в его честь), который поступил на службу в Музей, уже будучи авторитетным геометром, стал известен благодаря прекрасным лекциям. Птолемей I, желая достичь вершин мудрости, попросил Евклида обучить его геометрии. Неизвестно, было ли тому виной желание поскорее овладеть заветным знанием или нехватка времени, но царь попросил Евклида поспешить и спросил, нельзя ли обучиться геометрии поскорее. Евклид ответил, что в геометрии нет «царского пути», дав понять, что путь к знанию одинаков для царей и плебеев, для богачей и бедняков. Евклиду не откажешь в смелости: не будем забывать, что его собеседник платил ему жалование.

- Существуют XIV и XV книги «Начал» Евклида. Исследователи сходятся на том, что эти книги представляют собой апокрифы. Они содержат некоторые важные утверждения, автором которых, несомненно, был Гипсикл Александрийский (II в. до н. э.). В то время часто случалось так, что открытия приписывались более ранним и известным авторам.

Биология и математика

От статистики к теории узлов

◄ *Математическая экология занимается составлением моделей, описывающих поведение биосистем. Для столь сложных биосистем, как коралловые рифы, эта задача существенно усложняется и требует использования таких новых понятий математики, как динамические нелинейные системы и пространственная статистика.*

▼ *На оси ординат графика отмечены решения логистического уравнения в долгосрочном периоде при различных значениях показателя роста a. Для определенных диапазонов значений a значение переменной X стабилизируется вблизи одной или двух величин. Затем, после прохождения критической точки, число возможных значений в долгосрочном периоде становится бесконечно велико, система начинает демонстрировать хаотическое поведение и обретает фрактальную структуру.*

С того момента как Мендель начал проводить опыты по скрещиванию гороха с желтыми и зелеными горошинами, при описании законов наследования стала применяться теория вероятности. Можно убедиться, что математика была неотъемлемым элементом биологии с момента ее появления, точнее с того момента, когда биология начала оформляться как наука. До недавнего времени из всех разделов математики в биологии чаще всего использовалась статистика. В этом биология ничем не отличалась от других эмпирических наук, в которых большинство гипотез выдвигаются на основе массы экспериментальных данных, а модели строятся с применением методов статистики. Тем не менее в настоящее время благодаря невероятному прогрессу биологии, особенно молекулярной, в ней начинают использоваться различные разделы высшей математики, в частности дифференциальная геометрия, топология и анализ бесконечных рядов.

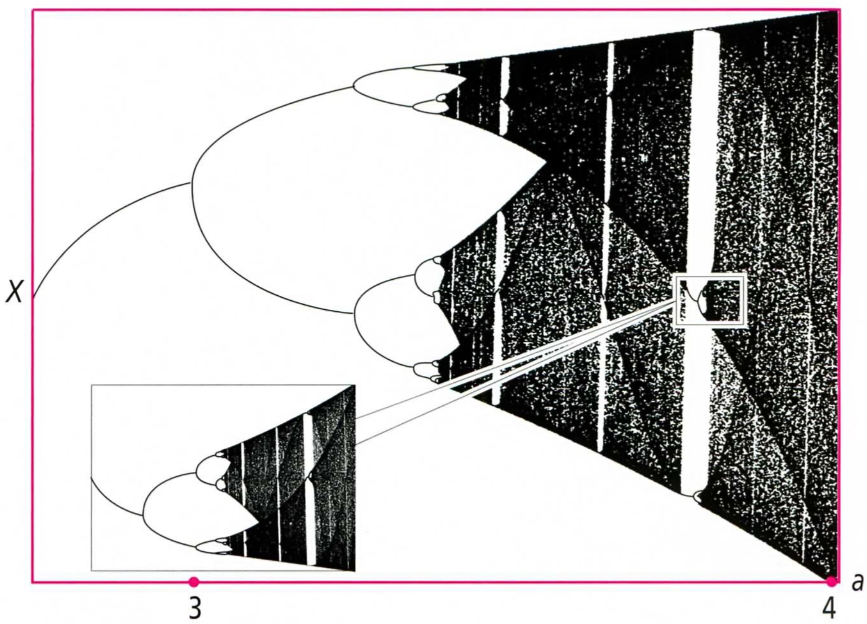
Логистическое отображение

В 1798 году было опубликовано «Эссе о росте народонаселения» британского экономиста Томаса Роберта Мальтуса (1766–1834), ставшее предметом многочисленных споров. Мальтус писал, что население возрастает в геометрической прогрессии, а продовольственные ресурсы — в арифметической. Независимо от социальных и политических дебатов, вызванных «мальтузианством», можно сказать, что именно с момента публикации эссе Мальтуса математика стала занимать важное место в биологии. В явном виде уравнение Мальтуса выглядит так: если считать, что каждые 20 лет рождается новое поколение людей, рост населения (в отсутствие хищников, которые питаются людьми), которое обозначается переменной X (в задачах более общего характера этой переменной обозначается биомасса), будет описываться следующим уравнением:

$$X(n+1) = a \cdot X(n) \cdot [1 - X(n)],$$

где n — порядковый номер поколения, a — показатель роста, связанный со снабжением продовольственными ресурсами ($0 < a < 4$; при $a < 1$ население вымирает).

В более широком смысле отображения вида $f(x) = k \cdot x \cdot (1 - x)$, к которым относится представленное выше уравнение, называются логистическими отображениями.



Для определенных значений параметра k логистическое отображение обладает хаотическим поведением. По этой причине логистическое отображение входит в курс биологии в качестве введения, предваряющего изучение теории хаоса.

Геометрия ДНК

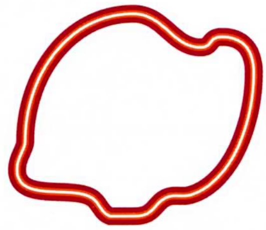
Раздел математики, в котором рассматриваются кривые и поверхности в пространстве, называется дифференциальной геометрией. Эта дисциплина играет основную роль при изучении молекул ДНК — структуры, образованной двумя цепочками нуклеотидов, закрученных в двойную спираль. Спираль — это пространственная кривая, то есть кривая, которая находится в трехмерном пространстве и по форме напоминает винтовую лестницу. Форму спирали определяют различные факторы: она может быть замкнутой или незамкнутой, также может изменяться расстояние по вертикали между ее витками (это расстояние называется шагом спирали). Эти характеристики спирали зависят от различных параметров, в том числе от напряжения материала, образующего спираль. В случае со спиралью ДНК все обстоит намного сложнее не только потому, что молекулы ДНК имеют форму двойной спирали (представьте себе две винтовые лестницы, закрученные вокруг общей оси), но и потому, что ось этой спирали не прямая, а кривая. Более того, молекула ДНК может изгибаться в пространстве и образовывать новую спираль более высокого порядка. Этот процесс называется суперспирализацией ДНК. Математическая формула, описывающая суперспираль ДНК, выглядит так:

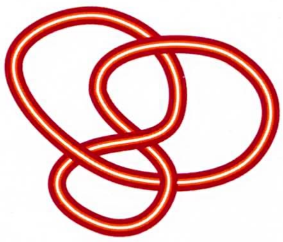
$$L = T + W,$$

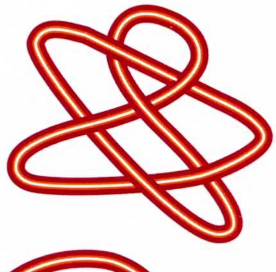
где L — порядок зацепления, который определяется как число витков, в которые закручена нить ДНК, T — кручение, которое равно числу витков двойной спирали ДНК, W — так называемый райзинг, показывающий, во сколько витков закручиваются двойные спирали между собой. Если суперспирализация отсутствует, $W = 0$, следовательно $L = T$.

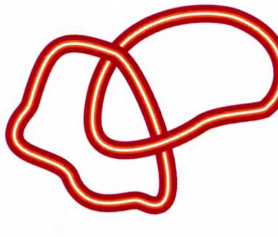
Топология ДНК

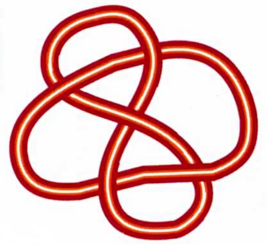
Точное определение пространственной структуры, описывающей суперспираль ДНК, — непростая задача, требующая использования дополнительных математических методов. В момент деления клеток цепочка ДНК завязывается в узлы, причем неслучайным образом: форму узлов определяет белок, называемый топоизомераза. Кольца полинуклеотидов, образуемые цепочками ДНК, могут связываться в узлы и приобретают особую форму, которая напрямую влияет на их биохимические свойства. Поэтому задача о классификации узлов цепочек ДНК крайне важна.

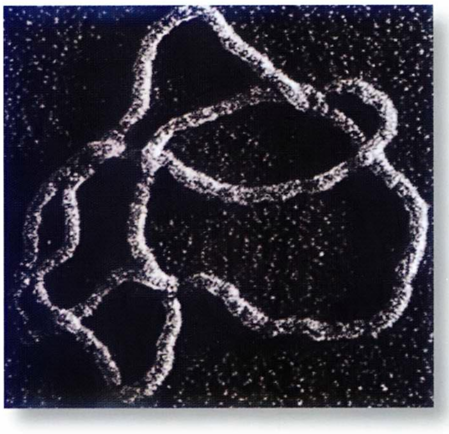




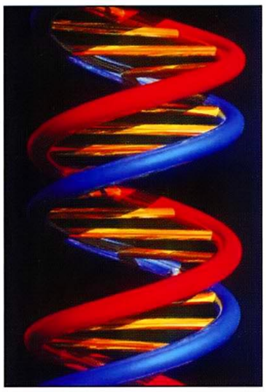








▲ *Во многих случаях цепочка ДНК имеет форму кольца или двух сцепленных колец. Кроме того, как показано на этом снимке с электронного микроскопа и на рисунках, цепочка ДНК под действием особых ферментов образует узлы, которые с большой вероятностью имеют важную биологическую функцию. Пока что их функция в точности неизвестна.*



▲ *Две цепочки ДНК (красная и синяя) связывают сложные геометрические отношения, приблизительное представление о которых дает рисунок. Чтобы определить основные параметры спирали ДНК и ее кручение, не обойтись без специализированных математических методов.*

При составлении этой классификации не обойтись без топологии, в частности без ее раздела, который называется теорией узлов.

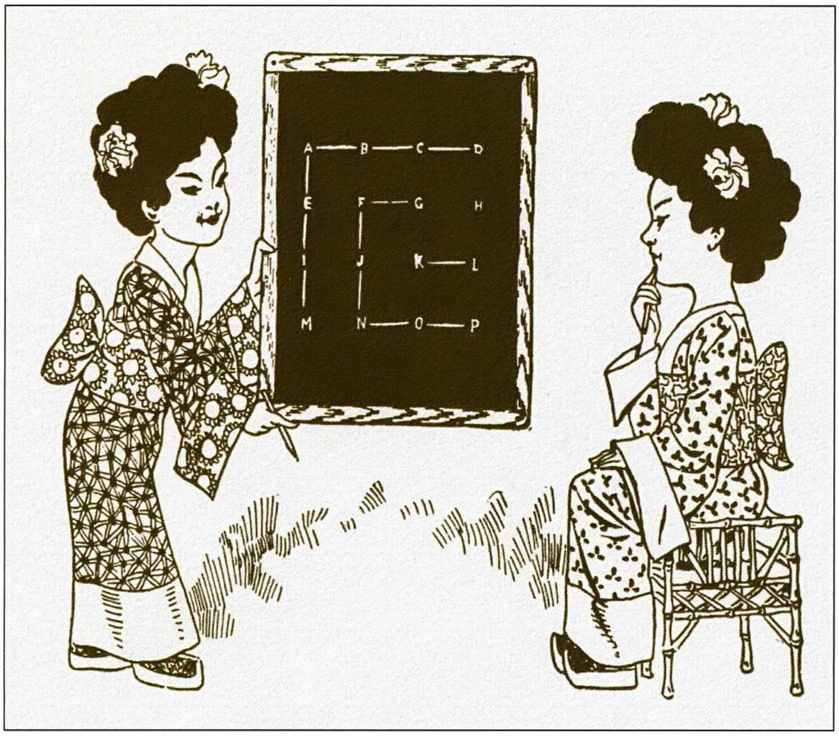
Считается, что петли, образуемые в узлах, имеют бесконечно малую плотность. Кроме того, особую важность представляет классификация этих узлов с точки зрения топологии (в топологии два узла считаются эквивалентными, если от одного из них можно перейти к другому посредством непрерывной деформации, то есть без разрезов и склеек).

ЭТО ИНТЕРЕСНО

- По сравнению с математикой биологию можно считать молодой наукой. Термин «биология» ввел Жан Батист Ламарк (1744–1829) в начале XIX века, однако по-настоящему широко этот термин стал использоваться лишь спустя много лет.

- Сегодня мы знаем, что клетки сами по себе способны решать настоящие математические задачи, в частности, в процессе метаболизма, и находить элегантные решения задач оптимизации и логики. Таким образом, не только математика используется в биологии, но и биология может оказаться полезной в математике.

Китайские и голландские задачи



▲ *Каков лучший ход и сколько квадратиков удастся замкнуть этим ходом?*

1. Задача о маленьких квадратах

Сейчас я расскажу вам об известной игре родом с Востока, очень похожей на знаменитую игру «Та-Те-Ти». Одна из китаянок написала на доске 16 букв в четыре строки, как показано на рисунке, затем провела прямую между буквами A и B, после чего ее соперница соединила буквы E и A. Если теперь первая девушка соединит E и F, то вторая проведет линию между B и F, образуется квадратик, и вторая девушка получит право еще на один ход. Однако соперницы действовали столь умело, что ни одной из них не удалось замкнуть квадратик, хотя каждая сделала по шесть ходов. Игра достигла критического момента, в котором одна из девушек обязательно победит, так как у нее нет другого выхода. Право хода имеет сидящая девушка. Если она соединит буквы M и N, ее соперница замкнет сразу четыре квадратика одним ходом и получит право еще на один ход, на котором она соединит H и L и замкнет все оставшиеся квадратики.

Какой ход вы порекомендуете совершить девушке и сколько квадратиков она выиграет по сравнению с наилучшим из возможных ходов второй девушки?

Напомним, что, если одному из игроков удается замкнуть квадратик, он получает право еще на один ход.

Предположим, что один из игроков соединил D и H. Затем второй игрок соединил H и L, и вне зависимости от того, какой ход сделает первый игрок, второй выиграет девять квадратиков.

Эта игра требует немалой сноровки, в чем вы убедитесь сами, сыграв несколько партий.

2. Голландские жены

В нашей стране до сих пор сохранились некоторые старинные голландские обычаи, в частности обмен скотом, домашней птицей и продуктами в самых разных количествах: яйца торгуются по 20 штук, прочие продукты — десятками, пригоршнями, кучками или другими малыми мерами веса. Например, сахар отвешивается по три с половиной фунта и так далее.

Одна любопытная древняя задача, опубликованная пару веков назад в сборнике анекдотов старого Манхэттена, показывает, сколь сложным способом голландские колонисты вели торговлю.

В этом сборнике можно прочесть такие строки: «Меня пришли повидать трое голландских друзей, которые только что сыграли свадьбу и посему привели с собой жен. Моих друзей звали Хендрик, Клаас и Корнелиус, их жен — Геертринг, Катрун и Анна, но я позабыл, кто на ком был женат. Они сказали мне, что ходили на рынок, дабы купить свиней, и каждый из них купил столько свиней, сколько шиллингов заплатил за каждую. Хендрик купил на 23 свиньи больше, чем Катрун, а Клаас — на 11 больше, чем Геертринг. Они также сказали, что каждый мужчина заплатил на три гинеи (63 шиллинга) больше, чем его супруга. Я хочу узнать, возможно ли по этому описанию сказать, как звали супругу каждого из моих друзей».

Эту любопытную задачу легко решить, если применить несколько хитроумных экспериментальных методов.

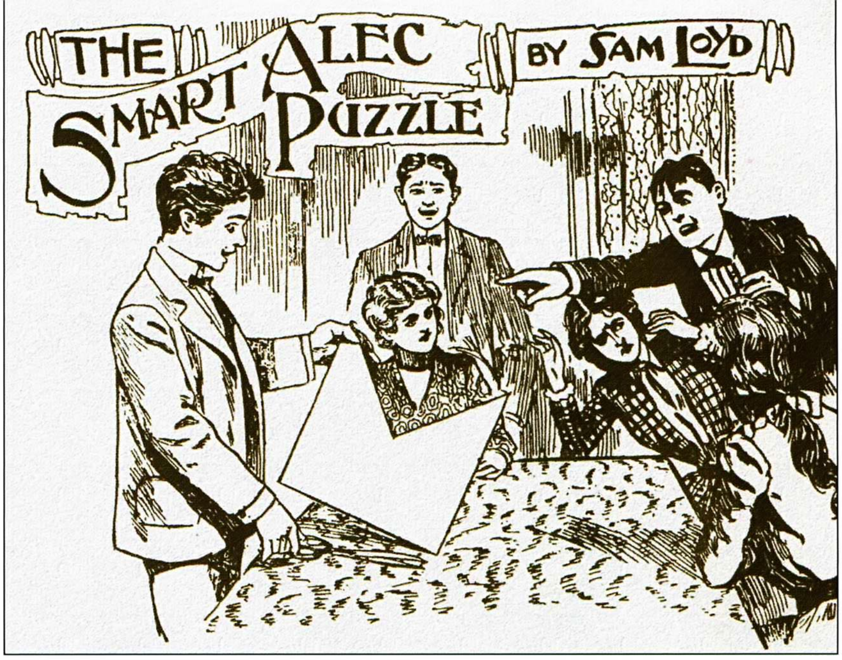
3. Задача смышленого Алекса

Любой, кто задавал какую-нибудь задачу группе друзей, знаком с Алексом и его манерой доказывать, что он знает все о задаче, еще до того, как услышит объяснение. Если задача ему знакома, он сразу же говорит ответ, не давая остальным возможности подумать. Если же задача ему незнакома, он принимается доказывать, что она похожа на другую, известную ему и, разумеется, более сложную задачу. Как правило, его объяснения заставляют вспомнить о персидской пословице: «Тот, кто не знает, и не знает об этом, всем докучает». Заставить Алекса признать свое поражение — подлинное удовольствие. Именно это произошло в случае, о котором я сейчас расскажу.

Гарри собирался продемонстрировать своим юным друзьям увлекательную головоломку, когда его прервал Алекс, который счел, что это знаменитая старинная головоломка, знакомая всем любителям занимательных задач под названием «Задача Митры». Эта головоломка известна широкой публике вот уже почти 500 лет. В ней нужно разрезать лист бумаги на четыре части одинаковой формы и размера.

В ответ на хвастливое заявление Алекса, который попытался объяснить решение, Гарри быстро воскликнул:

«Превосходно! Задача заключается в том, чтобы разрезать лист бумаги на минимально возможное число частей, из которых можно сложить квадрат. Я сам позабыл ответ, однако мой друг Алекс с радостью напомнит его».



Решения

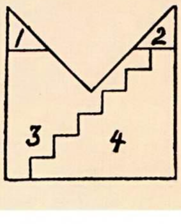
1. Эта головоломка содержит множество удивительных вариантов и предоставляет широчайший простор для тонких расчетов. Первый игрок должен замкнуть 7 квадратиков, проведя линию, соединяющую G и H. Если затем второй игрок соединит J и K, первый сможет замкнуть 2 квадратика, соединив K и O, а затем P и L, после чего сделает ожидаемый ход, соединив L и H, вместо того чтобы замкнуть еще 2 квадратика. Тогда другой игрок замкнет 2 квадрата, соединив G и K, после чего обязан будет совершить еще один ход, который даст первому игроку возможность замкнуть 5 квадратиков. Если затем первый игрок соединит G и H, второй игрок соединит D–H, B–F, E–F, после чего совершит ожидаемый ход M–N, то гарантированно замкнет еще 4 квадратика. Этот интересный прием, при котором игрок отказывается от возможности сразу же замкнуть 2 квадратика, чтобы чуть позже замкнуть еще больше квадратиков, — самая интересная часть игры.

(Эта игра, которая знакома американским школьникам под названием «Точки и квадраты», возможно, самая простая и популярная из всех топологических игр. В нее можно играть на прямоугольных досках разных размеров. Проанализировать все возможные варианты на квадратной доске размером 3 × 3 нетрудно, однако доска 4 × 4, которую рассматривает Лойд, уже достаточно сложна. Нам неизвестны какие-либо публикации, где бы описывалась выигрышная стратегия для первого или второго игрока. Так как число квадратов нечетно, игра не может завершиться ничьей. В 1951 году Ричард Хейнс, проживавший по адресу 20-я улица, 1215, Талса, штат Оклахома, создал интересную трехмерную версию этой игры под названием «Кьюбиклы». Чтобы получить специальный блокнот с листами, размеченными для игры в «Кьюбиклы», отправьте доллар господину Хейнсу по указанному адресу.

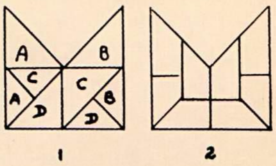
В эту игру также можно играть на поле из треугольных или шестиугольных ячеек.)

2. Геертринг купила 1 поросенка за 1 шиллинг, а ее муж, которым был не кто иной, как Корнелиус, купил 8 свиней по 8 шиллингов за каждую. Катрун купила 9 свиней по 9 шиллингов каждая, следовательно, ее муж Клаас купил 12 свиней по 12 шиллингов каждая. Анна купила 31 большую свинью по 31 шиллингу каждая, а ее достопочтенный супруг Хендрик купил 32 свиньи по 32 шиллинга каждая.

3. Чтобы разрезать лист на минимально возможное число частей согласно условиям задачи, сначала нужно отрезать треугольники 1 и 2 и поместить их в центре. Затем нужно разрезать лист зигзагообразно, как показано на рисунке, после чего сместить часть под номером 4 вниз, и вы получите квадрат из 4 частей.



(По иронии, в этой задаче, которую Лойд предложил, чтобы пристыдить «смышленого Алекса», который думает, что все знает, сам старый мастер допустил грубую ошибку. Как тщательно объясняет Генри Дьюдени в задаче № 150 своих «Математических головоломок и развлечений», метод Лойда верен только для прямоугольников с определенным соотношением сторон. В этом случае отношение длин сторон треугольника равно 3 к 4, поэтому разрезать лист так, чтобы составить квадрат, не получится. Дьюдени представил исправленное решение, в котором лист бумаги нужно разрезать на 5 частей. Решение, в котором лист бумаги нужно разрезать на 4 части, так никогда и не было найдено.



1
2

Даже старую «Задачу Митры», упоминаемую Лойдом, в которой нужно разрезать лист на четыре части равной формы и размера, можно решить при одном условии: элементы, обозначенные одинаковыми буквами (см. рис. 1), соединяются углами, поэтому их можно считать единым целым! Лойд также опубликовал более корректное решение, в котором лист делится на восемь частей. Это решение представлено на рис. 2.

Эта двухсотлетняя головоломка с годами становилась все более популярной как среди любителей игр, так и среди профессиональных математиков. Она состоит из шести элементов и кажется простой, однако скрывает в себе подлинные сокровища комбинаторики.

Сцепленные дощечки
Дьявольский крест

История этой головоломки не менее интересна, чем ее решение, и напоминает математический роман. Сначала она выглядит самым невинным образом, но постепенно превращается в монстра комбинаторной математики, в предмет нумерологического культа, последователи которого создали множество интернет-сайтов, посвященных ее анализу.

Кажущаяся простота

Головоломка кажется очень простой: она состоит из шести частей, представляющих собой прямоугольные параллелепипеды, из которых вырезаны кусочки разной формы. Элементы головоломки сцеплены друг с другом без промежутков, образуя двойной крест. После того как крест собран, невозможно увидеть, из каких частей он составлен и как они совмещаются между собой.

Один из шести элементов головоломки представляет собой полную призму без вырезов. Это ключ, главный элемент головоломки, однако в начале сборки это неизвестно. Определение этого элемента — важный, но не единственный шаг при решении головоломки.

Шесть элементов головоломки и собранный крест изображены на этой странице. Крест состоит из шести прямоугольных призм квадратного сечения, из которых вырезаны элементы разной формы. Когда головоломка собрана, ее элементы сцеплены попарно и располагаются параллельно друг другу. Три пары элементов головоломки пересекаются в середине перпендикулярно друг другу и располагаются вдоль осей пространственных координат.

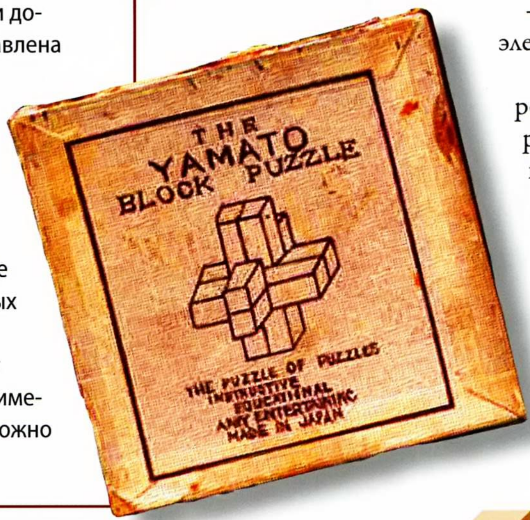
Основной элемент

▲◄ *«Дьявольский крест» в собранном и разобранном виде. Нельзя и представить, что элементы этой головоломки имеют столь сложную форму и сцеплены друг с другом без единого зазора.*

▼ *Английская версия головоломки «Дьявольский крест» 1910 года. Элементы этой головоломки изготовлены в Баварии. Местом рождения головоломки официально считается Германия, датой рождения — 1803 год.*

Далекие истоки головоломки

Где появилась столь сложная конструкция? На этот вопрос было предложено множество ответов, однако наиболее вероятным из них кажется наиболее прозаический. Многие головоломки хранились в деревянных шкатулках, стенки которых соединялись между собой так, как показано на рисунке. Первые головоломки, подобные «Дьявольскому кресту», могли возникнуть как разновидность шести дощечек с прорезями, из которых составлена изображенная на рисунке шкатулка-головоломка, и постепенно обрели нынешний вид. Если внимательно посмотреть на эту шкатулку, то можно увидеть, что ее элементы похожи на те, из которых состоит «Дьявольский крест»: шкатулка также состоит из шести попарно одинаковых элементов; каждая пара элементов ориентирована вдоль оси координат в пространстве; элементы шкатулки имеют прорези, благодаря которым их можно соединить без какого-либо ключа.



▲ *В англоязычном мире многие разновидности «Дьявольского креста» называются китайскими головоломками. На самом деле эти головоломки не были придуманы в Китае — продавцы попросту решили, что головоломки будут лучше продаваться, если дать им какое-нибудь экзотическое название. Головоломка, изображенная на рисунке, была создана в Японии и отличается малыми размерами: длина ее стороны составляет всего 4 сантиметра.*

Собрать и разобрать головоломку сложно, так как некоторые из ее элементов имеют разную форму, которая определяет их взаимное расположение. Существует множество похожих головоломок (которые, однако, уступают «Дьявольскому кресту» в сложности), отличающихся от нашей формой шести элементов, из которых они состоят.

Плодотворная идея

Хотя происхождение «Дьявольского креста» в точности неизвестно, патент на эту головоломку был выдан в США в 1917 году. Более чем за сто лет до этого, в 1803 году, похожая головоломка из шести элементов упоминается в немецком каталоге игрушек Бестермайера. Однако всеобщую известность «Дьявольский крест» получил в 1928 году, когда о нем рассказал Эдвин Уайетт в своей книге «Деревянные головоломки». Было выпущено бесчисленное множество версий этой головоломки под разными названиями, самой популярной из которых стал «Узел из шести частей». Головоломки такого типа называются узлами или китайскими головоломками.

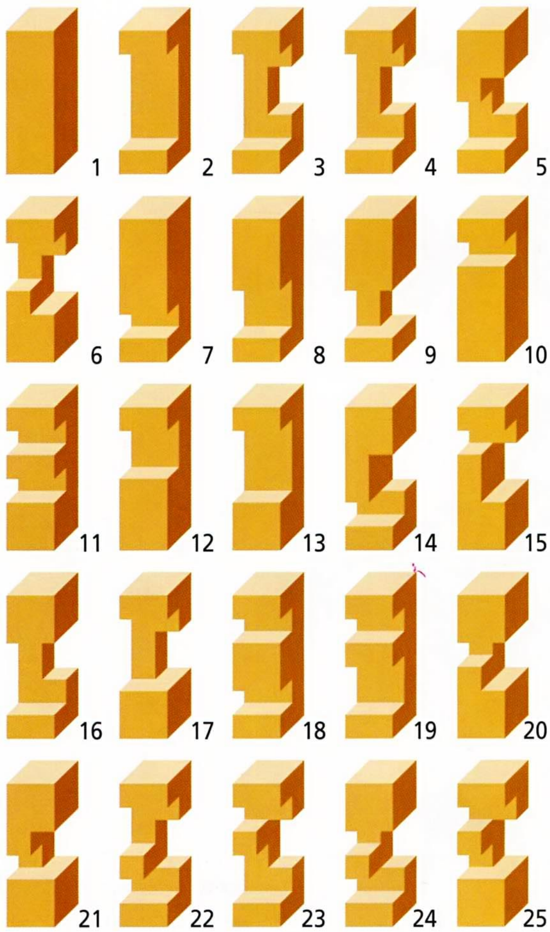
Благодаря тому что вырезы в центральной части элементов головоломки могут иметь разную форму, можно создать невероятное количество разных головоломок. Их внешний вид будет одинаков, но внутреннее устройство будет существенно различаться. Используя эти различия, можно составить как простые, так и сложные «дьявольские кресты».

При изучении этих головоломок математики обратили внимание, что их элементы могут относиться к одному из двух типов в зависимости от того, есть в них внутренние углы или нет (см. врезку на следующей странице). Простейшая классификация головоломок этого типа выглядит так:

— головоломки, элементы которых не имеют внутренних углов. К этой категории относится «Дьявольский крест» — самая популярная среди похожих головоломок;

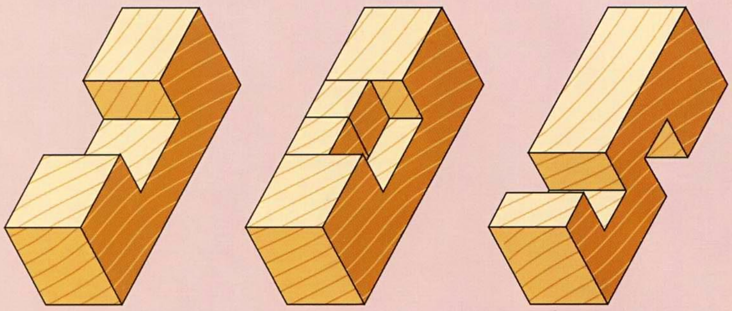
— головоломки, в которых хотя бы один элемент имеет внутренний угол.

Первая группа головоломок была подробно изучена. С 1994 года благодаря американскому математику Биллу Катлеру известно, что можно изготовить 314 различных головоломок, относящихся к первой группе, в 158 из которых ключевой элемент, то есть первый, который следует извлечь, чтобы решить головоломку, не будет иметь выемок. Также известно, что существует ровно 25 разных элементов, из которых можно составить эти 314 головоломок. Они изображены ниже.



С внутренними углами и без них

Элементы деревянной головоломки «Узел из шести частей» делятся на два типа. К первому относятся те, что можно изготовить из одной простой дощечки прямоугольной или круглой формы, которые не содержат внутренних углов. Элементы А и С не содержат внутренних углов, в отличие от элемента В:



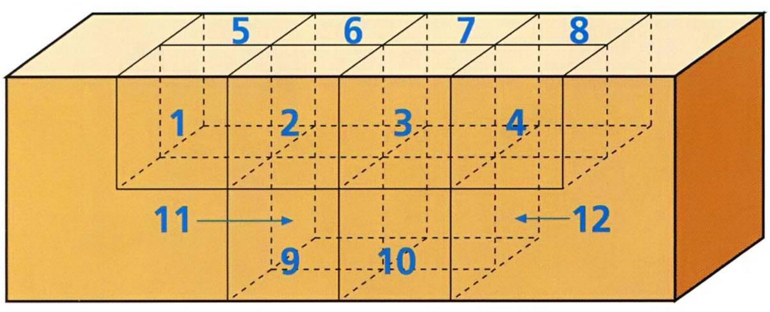
A B C

Для изготовления элемента В потребуется зубило или столярный клей, чтобы склеить два маленьких кубика, показанных на рисунке.

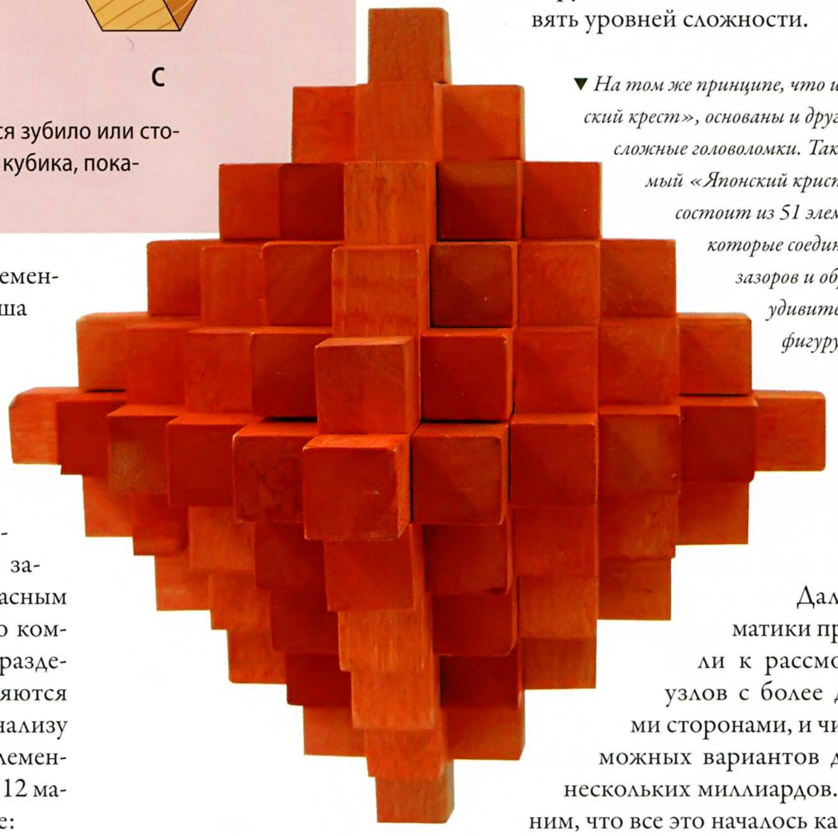
Как вы можете видеть, в число этих 25 элементов входят те шесть, из которых состоит наша головоломка. Представленная в этом выпуске головоломка — всего лишь одна из 314 внешне неразличимых головоломок.

Математическое описание шести деревянных дощечек

Общий анализ сборки «Дьявольского креста» сначала напоминал игру, но в итоге занял особое место в математике, став прекрасным примером использования так называемого комбинаторного анализа — очень сложного раздела математики, в котором часто применяются компьютеры. Прежде чем приступить к анализу головоломки, нужно убедиться, что все ее элементы образованы из одного или нескольких из 12 маленьких кубиков, изображенных на рисунке:



Далее можно (пусть это и непросто) определить все элементы головоломки в соответствии с классификацией, основанной на двоичной системе счисления, и обозначить каждый элемент головоломки цифрой. Сочетания шести этих элементов могут либо образовывать «Дьявольский крест», либо нет, однако с помощью двоичной системы счисления все их можно определить и пронумеровать. При изучении элементов головоломки не обойтись без помощи компьютеров. Тем не менее даже компьютеры не помогли ответить на некоторые вопросы, которые, возможно, таят в себе немало сюрпризов. Приведем пример. Существует всего 369 элементов (с внутренними углами и без них), из которых можно составить 119 979 «дьявольских крестов» без промежутков внутри. Математики посчитали, что тема на этом закрыта, и приступили к изучению других «крестов» с промежутками внутри (которые, разумеется, внешне неразличимы). Эта обширная группа головоломок делится на девять уровней сложности.



▼ *На том же принципе, что и «Дьявольский крест», основаны и другие, более сложные головоломки. Так называемый «Японский кристалл» состоит из 51 элемента, которые соединены без зазоров и образуют удивительную фигуру.*

Далее математики приступили к рассмотрению узлов с более длинными сторонами, и число возможных вариантов достигло нескольких миллиардов. Напомним, что все это началось как игра.

Игры и комбинаторика

Комбинаторный анализ (или комбинаторику) можно определить как искусство подсчета вещей. Изучение многих головоломок начинается с подсчета всех возможных исходов или сочетаний элементов, из которых затем выбираются те, что соответствуют допустимым решениям. При анализе головоломки «Дьявольский крест» комбинаторика используется для подсчета возможных элементов головоломки с учетом того, что все они представляют собой прямоугольную призму, из которой вырезано несколько кубиков (от одного до 12).

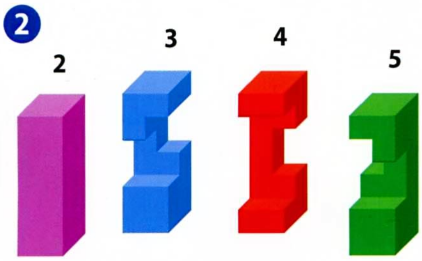
Решение

Чтобы собрать и разобрать головоломку, нужно выполнить одни и те же действия, но в обратном порядке. Мы продемонстрируем процесс сборки, так как он кажется сложнее неопытным игрокам, которые, видя перед собой шесть элементов, не знают, как соединить их вместе. Если вы хотите разобрать головоломку, достаточно выполнить указанные действия в обратном порядке. Рекомендуется запомнить каждый элемент, чтобы вы могли узнать его и отличить от других.

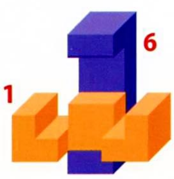
1

Расположите шесть элементов головоломки в этом порядке (обратите внимание на номера и цвета элементов).

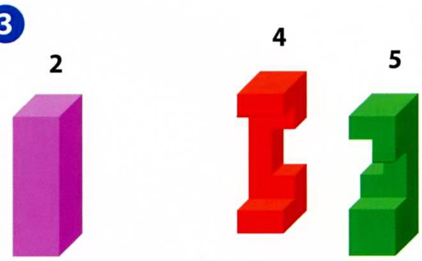
2



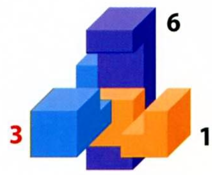
Наложите друг на друга элементы 1 и 6.



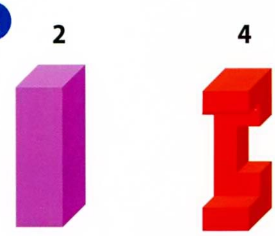
3



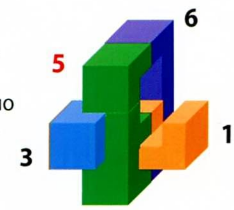
Расположите элемент 3 перпендикулярно остальным.



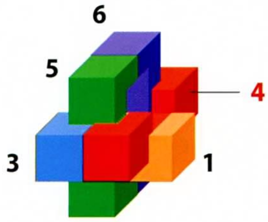
4



Разместите элемент 5 параллельно элементу 6.

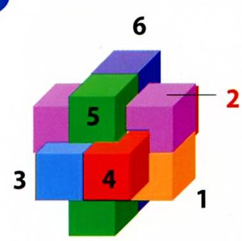


5



Расположите элемент 4 параллельно элементу 3.

6



Наконец, скрепите элементы головоломки ключом, в роли которого выступит элемент 2.


18 17 3
11 8 7 19
9 6 5 4 16
14 1 2 12
15 10
13

В следующем выпуске через 2 недели

Петля в клетке

Теория измерений
Числа, меры и величины

Математик, философ и универсальный ученый
Блез Паскаль

История вычислений
Воплощение логики в электрических цепях

Лучшее от Генри Э. Дьюдени
Три шахматные задачи

Спрашивайте в киосках!

16+